



TITLE:

非正則な素数の見付け方： Fermatの予想の検証実験 (実験整数 論および組合せ理論と計算機)

AUTHOR(S):

和田, 秀男

CITATION:

和田, 秀男. 非正則な素数の見付け方 : Fermatの予想の検証実験 (実験整数論および組合せ理論と計算機). 数理解析研究所講究録 1977, 301: 32-49

ISSUE DATE:

1977-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103811>

RIGHT:

非正則な素数の見つけ方

(Fermat の予想の検証実験)

上智大 理工・数・和田秀男

§ 1. Bernoulli 数

ベルヌイ数 B_k , ($k \geq 0$) は

$$(1) \quad \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k$$

により定義される有理数である. $B_0 = 1$ であり, 原理的に
は

$$(2) \quad B_k = \frac{-1}{\binom{k+1}{k}} \left\{ 1 + \binom{k+1}{1} B_1 + \binom{k+1}{2} B_2 + \cdots + \binom{k+1}{k-1} B_{k-1} \right\}$$

により順に計算出来る. $B_1 = -\frac{1}{2}$ であるが $B_{2k+1} = 0$
($k \geq 1$) となる. (2) を使えば $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$,
... と次々に計算出来る. ([1], [2] 参照.)

p を素数, $(p-1) \nmid 2k$ ならば B_{2k} の分母は p を含ま
ない. 逆に B_{2k} の分母は $(p-1) \mid 2k$ なる素数を 1 回
づつ含む (Staudt の定理). よって $1 < 2k < p-1$ の

とき B_{2k} の分母は p を含まない。しかし分子は p を含むかも知れない。奇素数 p に対し B_2, B_4, \dots, B_{p-3} のすべての分子が p を含まぬとき、 p を正則な素数といい、一つでも p を含むとき、 p を非正則な素数という。非正則な素数は小さい順に $37, 59, 67, 101, 103, 131, 149, 157, 233, \dots$ となり、無限に存在することが知られている。正則な素数も無限にあるだろうと予想されている。

$p < 125,000$ には正則な素数が 7128 個あり、非正則な素数が 4605 個あることが計算されている ([3])。その比 $4605/7128 = 0.6460\dots$ はやがては $\sqrt{e} - 1 = 0.6487\dots$ に収束するだろうと C. L. Siegel ([4]) により予想されている。

§ 2. Fermat の大定理

“ p が 3 以上の素数のとき、

$$(3) \quad x^p + y^p = z^p$$

は自然数解 x, y, z を持たない”

というのがフェルマーの大定理である。証明はまだされていない。Kummer は p が正則ならばこの大定理は正しい、と証明した。

フェルマーの大定理を 2 つに分けて “ $p \nmid x, y, z$ なる

自然数解がない" というのを Case 1 といひ " $p \mid xyz$ なる自然数解がない" というのを Case 2 といふ。Case 1 については、もし解があるならば $2 \leq p \leq 43$ なるすべての素数 p に対して

$$(4) \quad g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

が成立しなければならぬ。このことより $p < 253747889$ ならば Case 1 は正しいことが計算機を使わずに計算されている ([5])。また Case 1 の場合、解があるならば

$$0 \equiv B_{p-3} \equiv B_{p-5} \equiv B_{p-7} \equiv B_{p-9} \pmod{p}$$

が成立しなければならぬ。

§ 3. 正則性の判定法

フェルマーの大定理を確かめるために、正則か否かということは大切である。次の Voronoi (1889) の式はとても便利である。

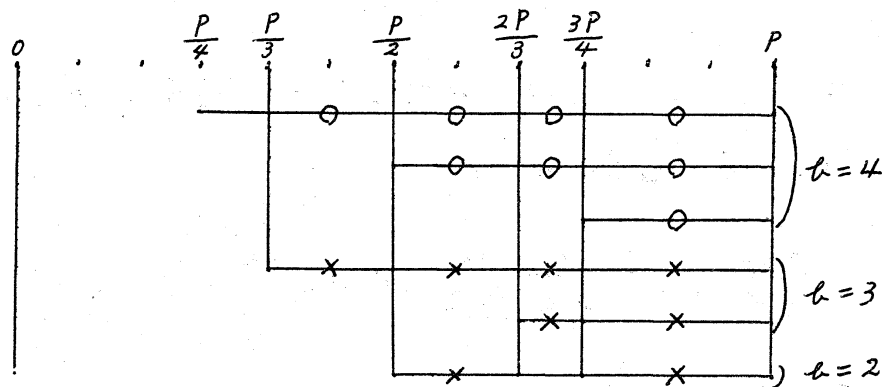
$$(p-1) \nmid 2k, \quad p \nmid k, \quad k \in \mathbb{N}$$

のとき

$$(5) \quad (k - k^{p-2k}) \frac{B_{2k}}{2k} \equiv \sum_{a=1}^{p-1} \left[\frac{ka}{p} \right] a^{2k-1} \pmod{p}$$

この式において $n = \left[\frac{ka}{p} \right]$ となるのは $\frac{n}{k}p \leq a < \frac{n+1}{k}p$ となるので、たとえば $k=4$ とおいた式より $k=3$,

$h=2$ とおいた式を引くと



$$\left(2^{P-2k} + 3^{P-2k} - 4^{P-2k} - 1\right) \frac{B_{2k}}{2k} \equiv \sum_{\frac{P}{4} < a < \frac{P}{3}} a^{2k-1} - \sum_{\frac{P}{4} < a < \frac{P}{3}} (P-a)^{2k-1}$$

よって次の式が得られる。

$$(6) \quad \left(2^{P-2k} + 3^{P-2k} - 4^{P-2k} - 1\right) \frac{B_{2k}}{4k} \equiv \sum_{\frac{P}{4} < a < \frac{P}{3}} a^{2k-1} \pmod{P}$$

同様に $x = 2^{P-2k}$, $y = 3^{P-2k}$, $z = 5^{P-2k}$, $u = 7^{P-2k}$ と

おくと

$$(7) \quad (x^2 - xy + y - 1) \frac{B_{2k}}{4k} \equiv \sum_{\frac{P}{6} < a < \frac{P}{4}} a^{2k-1}$$

$$(8) \quad (z + x - xy - 1) \frac{B_{2k}}{4k} \equiv \sum_{\frac{P}{6} < a < \frac{P}{5}} + \sum_{\frac{P}{3} < a < \frac{2P}{5}}$$

$$(9) \quad (x^2 - x + z - u) \frac{B_{2k}}{4k} \equiv \sum_{\frac{P}{7} < a < \frac{P}{5}} - \sum_{\frac{P}{4} < a < \frac{2P}{7}} - \sum_{\frac{2P}{5} < a < \frac{3P}{7}}$$

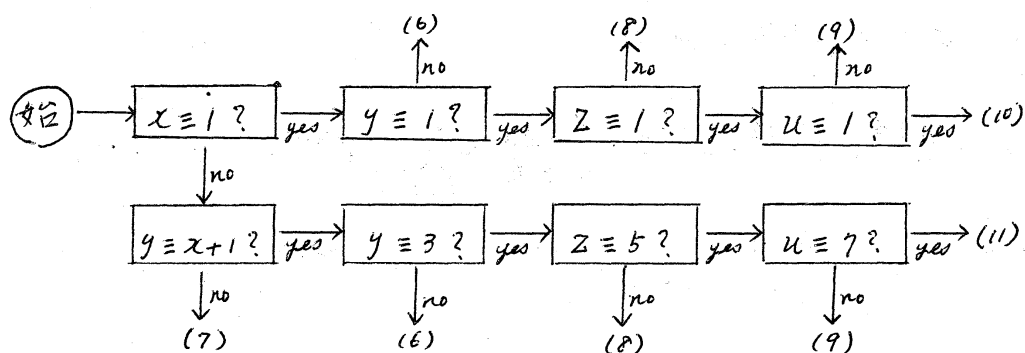
$$(10) \quad (xy - x - y - 1) \frac{B_{2k}}{4k} \equiv \sum_{0 < a < \frac{p}{6}}$$

などが得られる。しかしこれの式は左辺の係数が 0 になるかも知れない。E. Lehman は

$$(11) \quad 2^{2k-1} \frac{B_{2k}}{2k} p \equiv \frac{1}{2k} \sum_{0 < a < \frac{p}{2}} (p - 2a)^{2k} \pmod{p^2}$$

という式を作り出した。(1938)

これの式を $x^2 - xy + y - 1 = (x-1)(x+1-y)$ を用い、たとえば次のように使えば良い。



(6), (7)などは $\frac{p}{2}$ 回の計算をすれば良いから、一番能率的だと
思われていたが、W. Johnson は (8) を変形し

$$\begin{aligned}
 &\equiv \sum_{\frac{p}{6} < a < \frac{p}{5}} a^{2k-1} + \sum_{\frac{p}{6} < a < \frac{p}{5}} (2a)^{2k-1} + \sum_{\substack{\frac{p}{5} < a < \frac{2p}{5} \\ a = \text{奇数}}} a^{2k-1} \\
 &\equiv \left(1 + 2^{2k-1}\right) \sum_{\frac{p}{6} < a < \frac{p}{5}} a^{2k-1} - \sum_{\substack{\frac{3p}{5} < p-a < \frac{2p}{3} \\ p-a = \text{偶数}}} (p-a)^{2k-1}
 \end{aligned}$$

$$\equiv (1 + 2^{2k-1}) \sum_{\frac{P}{5} < a < \frac{P}{3}} a^{2k-1} - 2^{2k-1} \cdot \sum_{\frac{3P}{10} < a < \frac{1}{3}P} a^{2k-1}$$

とした。(1976) より $\frac{P}{15}$ 回の計算をすれば良い。これが今のところ一番能率良く思われる。

§4. 非正則な場合

P が非正則なとき、次の定理がある ([6], [7]).

“ $q = tP + 1$, $q < P(P-1)$ なる素数 q と $t^r \not\equiv 1 \pmod{q}$ となる自然数 t を定める。 $B_{2k} \equiv 0 \pmod{P}$ なるすべての $2k$ ($1 < 2k < P-1$) に対し

$$m = \frac{P-1}{2}, \quad d = \sum_{j=1}^m j^{P-2k}, \quad Q_{2k} = t^{-\frac{rd}{2}} \prod_{b=1}^m (t^{tb} - 1)^{t^{P-1-2k}}$$

と定めた Q_{2k} について $Q_{2k}^r \not\equiv 1 \pmod{q}$ ならば、Case 2 の場合の整数解は存在しない”

この定理を用いて Case 2 の場合も $P < 125,000$ までならば解がないことが計算されている ([3]). なお、この判定法を用いると副産物として円分体 $Q(\zeta_P)$, ($P < 125,000$) の最大実部分体 $Q(\zeta_P + \zeta_P^{-1})$ の類数が P で割れないことが得られる。

ところで “ $Q(\zeta_P + \zeta_P^{-1})$ の類数が P で割れないとき、Case 1 の場合、解がない” という Vandiver-森島の定理の

証明には誤りがあるらしい。注意深く論文[8]を読み直そう!

§5. 計算機を使って

$p < 2^{15}$ までの素数を正則なものと非正則なものに分けるのに私はミニコンピューター OKITAC-4300C をアセンブラ言語でプログラムを書き、昼も夜も続けて使い、1ヶ月かかった。

Samuel S. Wagstaff [3] は大型計算機を2年回も使い、 $p < 125,000$ までの素数の分類を行なったようである。

次の表は非正則な素数 L に対して $B_{2A} \equiv 0 \pmod{L}$ となる $2A$ をなすべたものである。2つ以上そのような $2A$ が存在するときは *印をつけた。

[編集者注] 講演当日 Wagstaff [3] のフロッピープリントのコピーが配布された。その文献と付表1(4つ以上の分子を割る)を参考資料として掲げる。

Wagstaff は一生の仕事として $p < 100,000,000$ まで検証したいとほりきっている。現在のペースだと、2000年までがかかっても完了しないかもしれない大仕事である。

A TABLE OF IRREGULAR PRIMES LESS THAN 32768. BY HIDEO WADA.

| L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A |
|------|-----|-------|------|-------|------|-------|------|-------|------|
| 37 | 32 | 631* | 226 | 1297 | 202 | 1979 | 148 | 2671* | 2394 |
| 59 | 44 | 647 | 236 | 1297* | 220 | 1987 | 510 | 2689 | 926 |
| 67 | 58 | 647* | 242 | 1301 | 176 | 1993 | 912 | 2753 | 482 |
| 101 | 68 | 647* | 554 | 1307 | 382 | 1997 | 772 | 2767 | 2528 |
| 103 | 24 | 653 | 48 | 1307* | 852 | 1997* | 1888 | 2777 | 1600 |
| 131 | 22 | 659 | 224 | 1319 | 304 | 2003 | 60 | 2789 | 1984 |
| 149 | 130 | 673 | 408 | 1327 | 466 | 2003* | 600 | 2789* | 2154 |
| 157 | 62 | 673* | 502 | 1367 | 234 | 2017 | 1204 | 2791 | 2554 |
| 157* | 110 | 677 | 628 | 1381 | 266 | 2039 | 1300 | 2833 | 1832 |
| 233 | 84 | 683 | 32 | 1409 | 358 | 2053 | 1932 | 2857 | 98 |
| 257 | 164 | 691 | 12 | 1429 | 996 | 2087 | 376 | 2861 | 352 |
| 263 | 100 | 691* | 200 | 1439 | 574 | 2087* | 1298 | 2909 | 400 |
| 271 | 84 | 727 | 378 | 1483 | 224 | 2099 | 1230 | 2909* | 950 |
| 283 | 20 | 751 | 290 | 1499 | 94 | 2111 | 1038 | 2927 | 242 |
| 293 | 156 | 757 | 514 | 1523 | 1310 | 2137 | 1624 | 2939 | 332 |
| 307 | 88 | 761 | 260 | 1559 | 862 | 2143 | 1916 | 2939* | 1102 |
| 311 | 292 | 773 | 732 | 1597 | 842 | 2153 | 1832 | 2939* | 2748 |
| 347 | 280 | 797 | 220 | 1609 | 1356 | 2213 | 154 | 2957 | 138 |
| 353 | 186 | 809 | 330 | 1613 | 172 | 2239 | 1826 | 2957* | 788 |
| 353* | 300 | 809* | 628 | 1619 | 560 | 2267 | 2234 | 2999 | 776 |
| 379 | 100 | 811 | 544 | 1621 | 980 | 2273 | 876 | 3011 | 1496 |
| 379* | 174 | 821 | 744 | 1637 | 718 | 2273* | 2166 | 3023 | 2020 |
| 389 | 200 | 827 | 102 | 1663 | 270 | 2293 | 2040 | 3049 | 700 |
| 401 | 382 | 839 | 66 | 1663* | 1508 | 2309 | 1660 | 3061 | 2522 |
| 409 | 126 | 877 | 868 | 1669 | 388 | 2309* | 1772 | 3083 | 1450 |
| 421 | 240 | 881 | 162 | 1669* | 1086 | 2357 | 2204 | 3089 | 1706 |
| 433 | 366 | 887 | 418 | 1721 | 30 | 2371 | 242 | 3119 | 1704 |
| 461 | 196 | 929 | 520 | 1733 | 810 | 2371* | 2274 | 3181 | 3142 |
| 463 | 130 | 929* | 820 | 1733* | 942 | 2377 | 1226 | 3203 | 2368 |
| 467 | 94 | 953 | 156 | 1753 | 712 | 2381 | 2060 | 3221 | 98 |
| 467* | 194 | 971 | 166 | 1759 | 1520 | 2383 | 842 | 3229 | 1634 |
| 491 | 292 | 1061 | 474 | 1777 | 1192 | 2383* | 2278 | 3257 | 922 |
| 491* | 336 | 1091 | 888 | 1787 | 1606 | 2389 | 776 | 3313 | 2222 |
| 491* | 338 | 1117 | 794 | 1789 | 848 | 2411 | 2126 | 3323 | 3292 |
| 523 | 400 | 1129 | 348 | 1789* | 1442 | 2423 | 290 | 3329 | 1378 |
| 541 | 86 | 1151 | 534 | 1811 | 550 | 2423* | 884 | 3391 | 2232 |
| 547 | 270 | 1151* | 784 | 1811* | 698 | 2441 | 366 | 3391* | 2534 |
| 547* | 486 | 1151* | 968 | 1811* | 1520 | 2441* | 1750 | 3407 | 2076 |
| 557 | 222 | 1153 | 802 | 1831 | 1274 | 2503 | 1044 | 3407* | 2558 |
| 577 | 52 | 1193 | 262 | 1847 | 954 | 2543 | 2374 | 3433 | 1300 |
| 587 | 90 | 1201 | 676 | 1847* | 1016 | 2557 | 1464 | 3469 | 1174 |
| 587* | 92 | 1217 | 784 | 1847* | 1558 | 2579 | 1730 | 3491 | 2544 |
| 593 | 22 | 1217* | 866 | 1871 | 1794 | 2591 | 854 | 3511 | 1416 |
| 607 | 592 | 1217* | 1118 | 1877 | 1026 | 2591* | 2574 | 3511* | 1724 |
| 613 | 522 | 1229 | 784 | 1879 | 1260 | 2621 | 1772 | 3517 | 1836 |
| 617 | 20 | 1237 | 874 | 1889 | 242 | 2633 | 1416 | 3517* | 2586 |
| 617* | 174 | 1279 | 518 | 1901 | 1722 | 2647 | 1172 | 3529 | 3490 |
| 617* | 338 | 1283 | 510 | 1933 | 1058 | 2657 | 710 | 3533 | 2314 |
| 619 | 428 | 1291 | 206 | 1933* | 1320 | 2663 | 1244 | 3533* | 3136 |
| 631 | 80 | 1291* | 824 | 1951 | 1656 | 2671 | 404 | 3539 | 2082 |

| L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A |
|-------|------|-------|------|-------|------|-------|------|-------|------|
| 3539* | 2130 | 4349 | 2052 | 5209* | 2923 | 6247 | 1492 | 7039 | 1454 |
| 3559 | 344 | 4409 | 636 | 5227 | 308 | 6247* | 3474 | 7057 | 4154 |
| 3559* | 1592 | 4409* | 672 | 5231 | 3466 | 6257 | 4272 | 7057* | 4972 |
| 3581 | 1466 | 4421 | 3768 | 5297 | 4810 | 6263 | 3286 | 7069 | 1478 |
| 3583 | 1922 | 4451 | 2896 | 5303 | 4156 | 6263* | 4226 | 7069* | 2570 |
| 3593 | 360 | 4451* | 2978 | 5309 | 158 | 6287 | 4452 | 7109 | 290 |
| 3593* | 642 | 4457 | 444 | 5351 | 1948 | 6287* | 5034 | 7121 | 1502 |
| 3607 | 1976 | 4493 | 746 | 5399 | 1482 | 6317 | 2354 | 7127 | 6798 |
| 3613 | 2082 | 4519 | 848 | 5413 | 1702 | 6329 | 5102 | 7177 | 962 |
| 3617 | 16 | 4523 | 456 | 5441 | 4726 | 6337 | 1956 | 7187 | 3906 |
| 3617* | 2856 | 4561 | 436 | 5443 | 1710 | 6343 | 750 | 7207 | 1670 |
| 3631 | 1104 | 4591 | 2292 | 5477 | 1150 | 6343* | 5820 | 7207* | 5774 |
| 3637 | 2526 | 4591* | 3596 | 5479 | 1826 | 6367 | 1190 | 7211 | 898 |
| 3637* | 3202 | 4637 | 3618 | 5479* | 4802 | 6373 | 2838 | 7213 | 1436 |
| 3671 | 1580 | 4639 | 3226 | 5501 | 666 | 6373* | 4226 | 7213* | 6930 |
| 3677 | 2238 | 4657 | 1578 | 5527 | 5206 | 6379 | 218 | 7229 | 6236 |
| 3697 | 1884 | 4657* | 2416 | 5531 | 3438 | 6421 | 438 | 7309 | 324 |
| 3779 | 2362 | 4657* | 4110 | 5557 | 3196 | 6449 | 4884 | 7321 | 348 |
| 3797 | 1256 | 4663 | 216 | 5569 | 938 | 6449* | 5830 | 7351 | 1466 |
| 3821 | 3296 | 4663* | 4278 | 5573 | 2032 | 6451 | 3236 | 7411 | 4712 |
| 3833 | 1840 | 4679 | 3592 | 5639 | 2672 | 6491 | 346 | 7459 | 5286 |
| 3833* | 1998 | 4691 | 3450 | 5641 | 4580 | 6521 | 236 | 7487 | 2500 |
| 3833* | 3286 | 4751 | 3768 | 5641* | 5258 | 6529 | 1564 | 7489 | 4250 |
| 3851 | 216 | 4783 | 252 | 5669 | 2218 | 6547 | 734 | 7499 | 3642 |
| 3851* | 404 | 4793 | 2636 | 5669* | 2680 | 6569 | 1692 | 7507 | 6924 |
| 3853 | 748 | 4813 | 2620 | 5689 | 348 | 6569* | 1776 | 7537 | 2264 |
| 3881 | 1686 | 4861 | 4678 | 5701 | 2450 | 6571 | 1744 | 7547 | 5644 |
| 3881* | 2138 | 4889 | 2924 | 5783 | 2200 | 6577 | 1312 | 7559 | 116 |
| 3917 | 1490 | 4903 | 3106 | 5791 | 1258 | 6619 | 1952 | 7591 | 2620 |
| 3967 | 106 | 4909 | 1462 | 5813 | 4284 | 6619* | 3170 | 7607 | 3594 |
| 3989 | 1936 | 4943 | 492 | 5821 | 1150 | 6659 | 2950 | 7643 | 5026 |
| 4001 | 534 | 4951 | 1914 | 5839 | 2308 | 6659* | 4014 | 7681 | 368 |
| 4003 | 82 | 4951* | 2468 | 5861 | 3554 | 6689 | 5252 | 7687 | 1246 |
| 4003* | 142 | 4951* | 3890 | 5897 | 2996 | 6701 | 5484 | 7687* | 3216 |
| 4003* | 2610 | 4957 | 3812 | 5903 | 3970 | 6733 | 1690 | 7687* | 6516 |
| 4021 | 3228 | 4969 | 1940 | 5903* | 5000 | 6763 | 4144 | 7691 | 2218 |
| 4027 | 2332 | 4973 | 4208 | 5923 | 4240 | 6763* | 6218 | 7727 | 950 |
| 4049 | 1854 | 5009 | 1544 | 5927 | 3642 | 6763* | 6230 | 7727* | 3756 |
| 4051 | 3548 | 5009* | 4956 | 5939 | 342 | 6779 | 3994 | 7817 | 7346 |
| 4073 | 3620 | 5039 | 594 | 5939* | 5014 | 6793 | 2686 | 7823 | 3298 |
| 4129 | 1784 | 5077 | 3092 | 5953 | 3274 | 6823 | 4952 | 7829 | 1392 |
| 4157 | 658 | 5081 | 3016 | 6007 | 912 | 6827 | 4108 | 7853 | 3494 |
| 4157* | 2322 | 5099 | 1378 | 6011 | 5870 | 6833 | 2254 | 7901 | 2472 |
| 4219 | 4190 | 5101 | 190 | 6037 | 3396 | 6833* | 5144 | 7901* | 4286 |
| 4243 | 2712 | 5107 | 4872 | 6043 | 1226 | 6857 | 6676 | 7907 | 584 |
| 4243* | 4146 | 5119 | 4086 | 6091 | 702 | 6863 | 6406 | 7919 | 3888 |
| 4259 | 3580 | 5167 | 4112 | 6101 | 2008 | 6949 | 2432 | 7927 | 6448 |
| 4259* | 3726 | 5179 | 4732 | 6173 | 5008 | 6971 | 2010 | 7937 | 3980 |
| 4261 | 2068 | 5189 | 1102 | 6173* | 5894 | 6997 | 1746 | 7949 | 2506 |
| 4339 | 214 | 5209 | 644 | 6217 | 4186 | 7001 | 4842 | 7949* | 3436 |

| L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A |
|-------|------|-------|------|--------|-------|---------|-------|--------|-------|
| 7951 | 4328 | 8731* | 7274 | 9473 | 6156 | 10487 | 1502 | 11437* | 4960 |
| 7963 | 4748 | 8747 | 2688 | 9511 | 1132 | 10499 | 2644 | 11443 | 6786 |
| 8011 | 622 | 8753 | 1050 | 9533 | 3122 | 10531 | 2172 | 11483 | 3504 |
| 8039 | 6636 | 8753* | 4784 | 9539 | 1060 | 10531* | 3804 | 11489 | 340 |
| 8059 | 874 | 8779 | 1072 | 9539* | 9172 | 10589 | 80 | 11503 | 1078 |
| 8069 | 5354 | 8821 | 2358 | 9613 | 4830 | 10589* | 1182 | 11551 | 9788 |
| 8087 | 5558 | 8831 | 1552 | 9631 | 860 | 10589*1 | 10116 | 11597 | 10868 |
| 8089 | 44 | 8831* | 2620 | 9677 | 7094 | 10597 | 6478 | 11621 | 9102 |
| 8089* | 3906 | 8831* | 3830 | 9689 | 3068 | 10597* | 7488 | 11657 | 6358 |
| 8101 | 5968 | 8837 | 4212 | 9689* | 5280 | 10657 | 1278 | 11677 | 7346 |
| 8101* | 7898 | 8837* | 4374 | 9733 | 138 | 10663 | 9430 | 11701 | 3346 |
| 8123 | 5906 | 8839 | 5584 | 9739 | 3374 | 10663* | 9788 | 11743 | 9580 |
| 8161 | 2424 | 8849 | 6638 | 9743 | 152 | 10687 | 1518 | 11777 | 2898 |
| 8161* | 2758 | 8893 | 5336 | 9767 | 2410 | 10723 | 2496 | 11779 | 5120 |
| 8179 | 5354 | 8923 | 2382 | 9767* | 4586 | 10729 | 7528 | 11779* | 5780 |
| 8191 | 7680 | 8923* | 5614 | 9791 | 7318 | 10733 | 4760 | 11783 | 2514 |
| 8209 | 8056 | 8929 | 4126 | 9803 | 3562 | 10739 | 9638 | 11783* | 8106 |
| 8219 | 5014 | 8933 | 4442 | 9811 | 1366 | 10771 | 2970 | 11789 | 6868 |
| 8221 | 4900 | 8951 | 7404 | 9829 | 4562 | 10831 | 1136 | 11831 | 5862 |
| 8231 | 4806 | 8999 | 572 | 9829* | 7548 | 10847 | 10232 | 11839 | 8154 |
| 8293 | 5784 | 9011 | 4052 | 9833 | 4234 | 10859 | 5862 | 11863 | 11012 |
| 8317 | 7172 | 9011* | 4294 | 9839 | 4844 | 10867 | 1390 | 11867 | 2618 |
| 8369 | 7398 | 9011* | 5444 | 9859 | 1514 | 10957 | 4254 | 11887 | 2286 |
| 8369* | 8348 | 9013 | 8214 | 9859* | 3812 | 10973 | 7170 | 11897 | 1872 |
| 8419 | 174 | 9041 | 4972 | 9871 | 2980 | 10979 | 9150 | 11909 | 6314 |
| 8419* | 2658 | 9043 | 6204 | 9883 | 9622 | 11027 | 3910 | 11923 | 1488 |
| 8429 | 2478 | 9059 | 8100 | 9901 | 8550 | 11027* | 4620 | 11923* | 5528 |
| 8443 | 1894 | 9103 | 8996 | 9907 | 5968 | 11047 | 6568 | 11933 | 2336 |
| 8447 | 1300 | 9133 | 3498 | 9923 | 938 | 11059 | 5288 | 11939 | 11332 |
| 8467 | 2368 | 9133* | 9104 | 9949 | 4810 | 11059* | 7886 | 12007 | 5310 |
| 8527 | 2442 | 9137 | 5160 | 9949* | 9112 | 11069 | 3016 | 12011 | 11024 |
| 8537 | 6806 | 9137* | 5396 | 10009 | 3952 | 11069* | 3262 | 12073 | 744 |
| 8537* | 7190 | 9199 | 1964 | 10037 | 5740 | 11087 | 7406 | 12073* | 2458 |
| 8573 | 3562 | 9221 | 4802 | 10061 | 9922 | 11117 | 5024 | 12073* | 6874 |
| 8597 | 2846 | 9221* | 8470 | 10069 | 5808 | 11119 | 2564 | 12101 | 7718 |
| 8599 | 482 | 9277 | 2422 | 10069* | 8684 | 11149 | 10114 | 12119 | 7352 |
| 8609 | 6070 | 9311 | 9300 | 10093 | 4512 | 11161 | 10412 | 12119* | 10494 |
| 8609* | 6778 | 9323 | 1512 | 10133 | 10114 | 11243 | 3118 | 12143 | 6462 |
| 8623 | 4592 | 9323* | 7226 | 10193 | 4132 | 11279 | 9256 | 12149 | 11692 |
| 8627 | 1206 | 9337 | 5726 | 10243 | 8134 | 11279* | 11096 | 12197 | 10740 |
| 8629 | 3170 | 9349 | 28 | 10247 | 6270 | 11311 | 3998 | 12211 | 2942 |
| 8641 | 3944 | 9377 | 1596 | 10337 | 4816 | 11351 | 1018 | 12239 | 10316 |
| 8647 | 5700 | 9377* | 2118 | 10343 | 5744 | 11351* | 1044 | 12241 | 2712 |
| 8663 | 1698 | 9413 | 6674 | 10427 | 5140 | 11353 | 11040 | 12269 | 5260 |
| 8669 | 2904 | 9431 | 2766 | 10429 | 3652 | 11369 | 9186 | 12269* | 5496 |
| 8677 | 2658 | 9431* | 3920 | 10453 | 4378 | 11393 | 5112 | 12343 | 11506 |
| 8677* | 6794 | 9433 | 178 | 10457 | 10028 | 11399 | 892 | 12373 | 5604 |
| 8689 | 5744 | 9433* | 9026 | 10463 | 158 | 11411 | 4640 | 12413 | 11232 |
| 8719 | 6432 | 9463 | 3760 | 10463* | 1862 | 11423 | 6674 | 12421 | 732 |
| 8731 | 6654 | 9467 | 1598 | 10463* | 9500 | 11437 | 3714 | 12433 | 4106 |

| L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A |
|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|
| 12451 | 6726 | 13411* | 7450 | 14449 | 7996 | 15137 | 8340 | 15913 | 2546 |
| 12517 | 10688 | 13417 | 9908 | 14461 | 7422 | 15149 | 11976 | 15919 | 4098 |
| 12527 | 2122 | 13441 | 3016 | 14503 | 8246 | 15187 | 7656 | 15923 | 6792 |
| 12547 | 2612 | 13463 | 12674 | 14519 | 3464 | 15287 | 2884 | 15959 | 612 |
| 12583 | 11856 | 13487 | 4086 | 14519* | 3638 | 15287* | 8060 | 16007 | 6728 |
| 12613 | 308 | 13513 | 3430 | 14533 | 2884 | 15287*1 | 2774 | 16007* | 12082 |
| 12613* | 502 | 13537 | 11702 | 14533* | 3998 | 15307 | 5952 | 16007* | 13250 |
| 12613* | 9400 | 13567 | 2652 | 14533* | 8896 | 15313 | 7316 | 16069 | 1460 |
| 12613*1 | 0536 | 13567* | 2990 | 14537 | 5556 | 15319 | 8012 | 16069* | 5470 |
| 12637 | 11474 | 13577 | 12424 | 14551 | 7330 | 15319* | 8864 | 16111 | 1620 |
| 12641 | 1278 | 13613 | 2712 | 14561 | 2304 | 15377 | 1044 | 16127 | 9324 |
| 12697 | 10052 | 13627 | 13106 | 14593 | 7152 | 15383 | 3814 | 16127*1 | 4122 |
| 12703 | 594 | 13649 | 8096 | 14629 | 10886 | 15413 | 3970 | 16141 | 15308 |
| 12703* | 2782 | 13679 | 13528 | 14699 | 7054 | 15467 | 4992 | 16189 | 3468 |
| 12739 | 2328 | 13687 | 8136 | 14723 | 5332 | 15473 | 1172 | 16193 | 16000 |
| 12739*1 | 1490 | 13687* | 9570 | 14737 | 4498 | 15473*1 | 11752 | 16229 | 4552 |
| 12743 | 1230 | 13693 | 6560 | 14737* | 8226 | 15497 | 3250 | 16253 | 8216 |
| 12743* | 8826 | 13693*1 | 2456 | 14737* | 8420 | 15527 | 1356 | 16273 | 11766 |
| 12781 | 2716 | 13697 | 4750 | 14753 | 8000 | 15541 | 2916 | 16369 | 9882 |
| 12781* | 5082 | 13709 | 3500 | 14753* | 9244 | 15583 | 6806 | 16369*1 | 5620 |
| 12809 | 4618 | 13711 | 8814 | 14759 | 13688 | 15601 | 11818 | 16417 | 11550 |
| 12821 | 8886 | 13721 | 218 | 14767 | 238 | 15619 | 10180 | 16427 | 6842 |
| 12899 | 9532 | 13723 | 1626 | 14767* | 8494 | 15629 | 8482 | 16477 | 1860 |
| 12907 | 11842 | 13729 | 12132 | 14783 | 7130 | 15647 | 11158 | 16481 | 3742 |
| 12923 | 3866 | 13759 | 8386 | 14797 | 2582 | 15647*1 | 3490 | 16519 | 15688 |
| 12973 | 12552 | 13763 | 4102 | 14813 | 12012 | 15649 | 9518 | 16547 | 4708 |
| 12979 | 4960 | 13781 | 12040 | 14831 | 2570 | 15667 | 7362 | 16553 | 6588 |
| 12983 | 11762 | 13873 | 4172 | 14831*1 | 3256 | 15667* | 9904 | 16553* | 6744 |
| 13001 | 7072 | 13931 | 11238 | 14843 | 8406 | 15671 | 12910 | 16567 | 5438 |
| 13033 | 6718 | 13999 | 10362 | 14843* | 8428 | 15733 | 14760 | 16573 | 4432 |
| 13037 | 7264 | 14011 | 5324 | 14851 | 12520 | 15737 | 6352 | 16603 | 16100 |
| 13049 | 9840 | 14057 | 6872 | 14867 | 1628 | 15737* | 7454 | 16607 | 9950 |
| 13063 | 3796 | 14081 | 8200 | 14869 | 12866 | 15737*1 | 2486 | 16607*1 | 3742 |
| 13127 | 898 | 14153 | 4148 | 14879 | 9664 | 15737*1 | 3078 | 16657 | 15570 |
| 13147 | 2550 | 14177 | 8192 | 14891 | 1144 | 15739 | 14260 | 16661 | 8560 |
| 13147* | 8826 | 14207 | 2086 | 14891*1 | 11256 | 15749 | 7208 | 16691 | 3162 |
| 13187 | 2618 | 14221 | 13190 | 14897 | 3054 | 15761 | 6902 | 16703 | 12700 |
| 13217 | 550 | 14243 | 2668 | 14897*1 | 11354 | 15767 | 7840 | 16729 | 13752 |
| 13217* | 2640 | 14249 | 886 | 14923 | 14334 | 15773 | 5294 | 16729*1 | 4756 |
| 13217* | 9132 | 14303 | 1584 | 14939 | 844 | 15787 | 9316 | 16741 | 2424 |
| 13219 | 12986 | 14323 | 10198 | 14947 | 1314 | 15787*1 | 11484 | 16741*1 | 3050 |
| 13249 | 12724 | 14327 | 7822 | 14957 | 2630 | 15787*1 | 11884 | 16763 | 2718 |
| 13259 | 224 | 14347 | 4800 | 14957*1 | 3172 | 15803 | 5722 | 16763*1 | 5346 |
| 13259*1 | 2262 | 14369 | 12262 | 14957*1 | 4374 | 15809 | 11986 | 16787 | 6718 |
| 13267 | 11848 | 14401 | 8684 | 15053 | 8486 | 15823 | 482 | 16811 | 14830 |
| 13297 | 1438 | 14401*1 | 3372 | 15091 | 470 | 15823*1 | 3552 | 16811*1 | 6730 |
| 13367 | 1488 | 14407 | 4556 | 15091*1 | 2228 | 15823*1 | 5748 | 16823 | 8036 |
| 13367* | 2874 | 14407* | 6688 | 15101 | 774 | 15887 | 2446 | 16829 | 8902 |
| 13399 | 6936 | 14411 | 6380 | 15107 | 11282 | 15901 | 5780 | 16829*1 | 0926 |
| 13411 | 5974 | 14411* | 8170 | 15131 | 12152 | 15901*1 | 11970 | 16831 | 4020 |

| L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A |
|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|
| 16831* | 8492 | 18131 | 1382 | 19213* | 12772 | 19979 | 9472 | 20983 | 5422 |
| 16843 | 16840 | 18199 | 16522 | 19231 | 17004 | 19991 | 16996 | 21001 | 12864 |
| 16879 | 16780 | 18223 | 17618 | 19237 | 9078 | 19997 | 5052 | 21013 | 15420 |
| 16883 | 10496 | 18253 | 6096 | 19289 | 4658 | 20011 | 8452 | 21017 | 7570 |
| 16901 | 7518 | 18257 | 3812 | 19301 | 13092 | 20029 | 10332 | 21019 | 3108 |
| 16901* | 9986 | 18269 | 940 | 19309 | 11418 | 20051 | 9098 | 21023 | 1196 |
| 16903 | 3174 | 18289 | 3938 | 19319 | 7820 | 20051* | 17092 | 21023* | 13546 |
| 16927 | 458 | 18301 | 9428 | 19373 | 13422 | 20063 | 18428 | 21031 | 6062 |
| 16931 | 14252 | 18313 | 2664 | 19373* | 14066 | 20089 | 13476 | 21061 | 17946 |
| 16937 | 4276 | 18401 | 14828 | 19381 | 2610 | 20113 | 8664 | 21067 | 2278 |
| 16937* | 4872 | 18427 | 3524 | 19381* | 4812 | 20123 | 7746 | 21067* | 19542 |
| 16943 | 5408 | 18427* | 17226 | 19391 | 1480 | 20129 | 550 | 21101 | 5710 |
| 16979 | 6148 | 18439 | 2602 | 19427 | 11918 | 20161 | 19316 | 21143 | 2126 |
| 16987 | 1062 | 18461 | 4370 | 19477 | 3032 | 20177 | 7242 | 21149 | 17278 |
| 16987* | 16674 | 18461* | 14712 | 19483 | 16286 | 20201 | 5148 | 21157 | 10530 |
| 17021 | 16958 | 18493 | 6810 | 19507 | 8244 | 20201* | 6056 | 21163 | 19962 |
| 17027 | 8632 | 18503 | 5324 | 19531 | 1376 | 20261 | 15642 | 21179 | 18338 |
| 17107 | 7208 | 18583 | 6724 | 19531* | 7820 | 20269 | 6110 | 21193 | 416 |
| 17107* | 14722 | 18713 | 4350 | 19543 | 5576 | 20269* | 10018 | 21193* | 610 |
| 17159 | 9712 | 18713* | 5300 | 19553 | 246 | 20297 | 6056 | 21211 | 1204 |
| 17183 | 9532 | 18713* | 12420 | 19553* | 3146 | 20297* | 6428 | 21211* | 3668 |
| 17191 | 16930 | 18869 | 3448 | 19577 | 2646 | 20341 | 4120 | 21221 | 14178 |
| 17203 | 1772 | 18869* | 4888 | 19583 | 4470 | 20369 | 18308 | 21269 | 12278 |
| 17209 | 15880 | 18869* | 16778 | 19597 | 16542 | 20393 | 5304 | 21283 | 14228 |
| 17231 | 7228 | 18899 | 6920 | 19681 | 18848 | 20393* | 12386 | 21313 | 21240 |
| 17231* | 7916 | 18911 | 15670 | 19697 | 8890 | 20407 | 3052 | 21317 | 15890 |
| 17317 | 11850 | 18919 | 5592 | 19697* | 16878 | 20411 | 12052 | 21319 | 2872 |
| 17341 | 10938 | 18919* | 12498 | 19699 | 5792 | 20431 | 5274 | 21319* | 10662 |
| 17341* | 14896 | 18947 | 9750 | 19699* | 16822 | 20507 | 15468 | 21323 | 17490 |
| 17401 | 7104 | 18959 | 11612 | 19709 | 3860 | 20521 | 3402 | 21391 | 7462 |
| 17419 | 16228 | 18973 | 3524 | 19709* | 17020 | 20521* | 6280 | 21419 | 4678 |
| 17467 | 6184 | 18973* | 11912 | 19739 | 17690 | 20533 | 1526 | 21467 | 1270 |
| 17471 | 11040 | 19001 | 14770 | 19763 | 1200 | 20533* | 11734 | 21481 | 13644 |
| 17551 | 4418 | 19051 | 11696 | 19763* | 4022 | 20533* | 12068 | 21491 | 8342 |
| 17581 | 7014 | 19051* | 18794 | 19793 | 858 | 20543 | 8594 | 21499 | 1664 |
| 17599 | 14676 | 19069 | 13030 | 19793* | 9036 | 20551 | 9106 | 21499* | 8408 |
| 17623 | 13980 | 19073 | 7664 | 19813 | 8138 | 20599 | 15288 | 21521 | 10660 |
| 17657 | 15798 | 19079 | 2218 | 19819 | 14048 | 20681 | 11564 | 21521* | 13974 |
| 17659 | 9030 | 19079* | 19010 | 19843 | 536 | 20707 | 11318 | 21529 | 7478 |
| 17659* | 9290 | 19121 | 13444 | 19843* | 6922 | 20731 | 19068 | 21563 | 86 |
| 17669 | 15298 | 19121* | 15610 | 19853 | 7664 | 20749 | 5578 | 21563* | 17812 |
| 17681 | 140 | 19139 | 2030 | 19891 | 14842 | 20759 | 15774 | 21599 | 13062 |
| 17681* | 1368 | 19157 | 6724 | 19919 | 1000 | 20849 | 12736 | 21601 | 11288 |
| 17681* | 11826 | 19157* | 15420 | 19927 | 7938 | 20879 | 16902 | 21613 | 804 |
| 17707 | 16262 | 19183 | 16992 | 19937 | 13734 | 20921 | 9740 | 21649 | 12134 |
| 17737 | 3110 | 19183* | 18338 | 19937* | 14126 | 20939 | 1260 | 21661 | 3426 |
| 17863 | 8068 | 19207 | 8564 | 19949 | 8460 | 20939* | 5016 | 21661* | 7738 |
| 17863* | 14300 | 19211 | 4106 | 19961 | 9282 | 20939* | 5746 | 21757 | 4590 |
| 17863* | 15830 | 19211* | 14080 | 19961* | 18544 | 20959 | 4368 | 21817 | 18856 |
| 18121 | 7764 | 19213 | 11360 | 19973 | 7172 | 20981 | 16102 | 21821 | 16260 |

| L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A |
|-------------|-------|-------------|-------|-------------|-------|-------------|-------|-------------|-------|
| 21871 | 4122 | 23081 | 9618 | 24197 | 21118 | 25357*17446 | | 26669 | 6390 |
| 21871*17306 | | 23099 | 15860 | 24239 | 19298 | 25391 | 18146 | 26669*11812 | |
| 21937 | 17328 | 23131 | 320 | 24317 | 15510 | 25391*24582 | | 26687 | 25572 |
| 21961 | 14494 | 23131*15090 | | 24373 | 10418 | 25439 | 19272 | 26699 | 12102 |
| 21977 | 13786 | 23159 | 19392 | 24373*10990 | | 25447 | 3698 | 26717 | 22750 |
| 21991 | 5832 | 23201 | 11066 | 24379 | 2874 | 25463 | 1856 | 26729 | 13596 |
| 22013 | 18182 | 23227 | 10634 | 24419 | 18752 | 25523 | 9822 | 26737 | 2116 |
| 22031 | 10032 | 23291 | 22998 | 24469 | 12318 | 25579 | 11822 | 26777 | 2526 |
| 22037 | 2846 | 23293 | 15614 | 24499 | 20324 | 25583 | 4494 | 26777*11462 | |
| 22037*20894 | | 23327 | 6880 | 24533 | 16290 | 25603 | 20718 | 26783 | 2348 |
| 22051 | 10086 | 23327* 7744 | | 24571 | 5050 | 25633 | 590 | 26783*13746 | |
| 22051*12748 | | 23333 | 10720 | 24593 | 5330 | 25673 | 8366 | 26801 | 4056 |
| 22063 | 1138 | 23333*16746 | | 24593*14210 | | 25717 | 10340 | 26881 | 7200 |
| 22067 | 5640 | 23339 | 2536 | 24623 | 702 | 25759 | 6878 | 26891 | 19072 |
| 22091 | 15602 | 23369 | 9390 | 24631 | 1510 | 25771 | 8028 | 26893 | 7472 |
| 22129 | 15458 | 23447 | 14024 | 24659 | 5020 | 25889 | 924 | 26903 | 17992 |
| 22157 | 6026 | 23531 | 13904 | 24659*12262 | | 25889*23448 | | 26947 | 14298 |
| 22247 | 434 | 23537 | 2676 | 24659*22098 | | 25933 | 15714 | 26953 | 7906 |
| 22259 | 21414 | 23539 | 8952 | 24671 | 750 | 25943 | 14318 | 26981 | 18564 |
| 22283 | 4316 | 23539*15134 | | 24671*14098 | | 25969 | 3066 | 26987 | 3588 |
| 22291 | 20008 | 23567 | 7052 | 24683 | 11774 | 26021 | 8212 | 26993 | 18336 |
| 22303 | 1970 | 23609 | 6158 | 24683*20138 | | 26021*18078 | | 27017 | 22122 |
| 22307 | 11972 | 23623 | 2508 | 24691 | 13564 | 26083 | 11298 | 27043 | 16638 |
| 22343 | 2208 | 23623* 4252 | | 24733 | 22704 | 26111 | 3690 | 27061 | 5784 |
| 22349 | 6868 | 23633 | 22828 | 24763 | 3974 | 26111*23394 | | 27067 | 21880 |
| 22367 | 12038 | 23669 | 3670 | 24763*14940 | | 26113 | 298 | 27073 | 26042 |
| 22369 | 20068 | 23671 | 21542 | 24767 | 12738 | 26119 | 25068 | 27103 | 2314 |
| 22381 | 17668 | 23689 | 16856 | 24793 | 10430 | 26141 | 25472 | 27107 | 13226 |
| 22391 | 10210 | 23719 | 14680 | 24821 | 1682 | 26161 | 17070 | 27127 | 8682 |
| 22453 | 20490 | 23719*17434 | | 24821*12136 | | 26161*24488 | | 27197 | 24514 |
| 22469 | 10170 | 23773 | 11522 | 24851 | 16378 | 26171 | 23706 | 27271 | 2790 |
| 22481 | 1992 | 23773*17584 | | 24919 | 14620 | 26227 | 14270 | 27277 | 1914 |
| 22541 | 11908 | 23819 | 16186 | 24923 | 8394 | 26251 | 1028 | 27277* 9778 | |
| 22541*15542 | | 23873 | 2294 | 24943 | 7008 | 26251*23336 | | 27299 | 24422 |
| 22549 | 15186 | 23957 | 5062 | 24977 | 1304 | 26267 | 8396 | 27361 | 1540 |
| 22573 | 3896 | 23971 | 16418 | 24977*23338 | | 26309 | 12318 | 27361*10900 | |
| 22639 | 20120 | 23977 | 4308 | 25013 | 23492 | 26347 | 17156 | 27361*24528 | |
| 22643 | 206 | 24019 | 9542 | 25087 | 21390 | 26387 | 12414 | 27367 | 10422 |
| 22643*19100 | | 24019*12588 | | 25117 | 15544 | 26393 | 8388 | 27367*15476 | |
| 22679 | 11866 | 24019*16020 | | 25127 | 3772 | 26423 | 20520 | 27509 | 10274 |
| 22777 | 8990 | 24049 | 12904 | 25153 | 842 | 26431 | 3166 | 27539 | 12562 |
| 22807 | 22060 | 24049*16340 | | 25153* 3406 | | 26479 | 24280 | 27541 | 25854 |
| 22853 | 9972 | 24077 | 8032 | 25153*21690 | | 26489 | 22778 | 27551 | 8216 |
| 22853*17346 | | 24083 | 17082 | 25189 | 10992 | 26497 | 4016 | 27581 | 15498 |
| 22963 | 21046 | 24091 | 14276 | 25189*19086 | | 26539 | 22950 | 27581*21296 | |
| 23003 | 14040 | 24107 | 20266 | 25301 | 2684 | 26561 | 15044 | 27611 | 15732 |
| 23011 | 7764 | 24133 | 10098 | 25321 | 4814 | 26561*15168 | | 27617 | 316 |
| 23021 | 21684 | 24137 | 3308 | 25321*23252 | | 26561*23790 | | 27631 | 19988 |
| 23057 | 16758 | 24151 | 21582 | 25343 | 24636 | 26627 | 16314 | 27647 | 4698 |
| 23059 | 19708 | 24181 | 2486 | 25357 | 13474 | 26627*25386 | | 27737 | 23332 |

| L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A | L | 2A |
|-------------|-------|-------------|-------|-------------|-------|-------------|-------|-------------|-------|
| 27749 | 13820 | 28627 | 18820 | 29531 | 27688 | 30577 | 16802 | 31627 | 28680 |
| 27751 | 2182 | 28631 | 18230 | 29567 | 216 | 30671 | 5098 | 31667 | 26224 |
| 27773 | 16024 | 28631*20316 | | 29587 | 18338 | 30677 | 28888 | 31687 | 19642 |
| 27773*18946 | | 28657 | 8116 | 29641 | 8832 | 30697 | 14202 | 31687*26698 | |
| 27773*19092 | | 28657*20614 | | 29723 | 16950 | 30727 | 18382 | 31721 | 29336 |
| 27779 | 9394 | 28663 | 16610 | 29753 | 4160 | 30757 | 5472 | 31729 | 5848 |
| 27779*11962 | | 28687 | 9200 | 29803 | 2094 | 30757*15514 | | 31741 | 8434 |
| 27793 | 27616 | 28771 | 25916 | 29803*14434 | | 30773 | 9818 | 31751 | 642 |
| 27809 | 25614 | 28789 | 2020 | 29803*19520 | | 30781 | 11234 | 31771 | 4942 |
| 27817 | 5516 | 28789*21360 | | 29833 | 7520 | 30809 | 21956 | 31847 | 30728 |
| 27823 | 24214 | 28789*23782 | | 29837 | 14868 | 30817 | 148 | 31907 | 15820 |
| 27827 | 14980 | 28793 | 20058 | 29863 | 5182 | 30829 | 22162 | 32009 | 350 |
| 27883 | 6248 | 28813 | 6996 | 29867 | 18712 | 30859 | 9534 | 32083 | 2032 |
| 27917 | 9250 | 28813*20670 | | 29917 | 10192 | 30893 | 9160 | 32089 | 27648 |
| 27947 | 16796 | 28817 | 6794 | 29917*12270 | | 30971 | 22038 | 32099 | 27678 |
| 27967 | 12832 | 28817*28248 | | 29921 | 19948 | 30977 | 21376 | 32119 | 11284 |
| 27983 | 306 | 28837 | 5980 | 29947 | 9916 | 31051 | 25402 | 32141 | 12162 |
| 28001 | 26736 | 28843 | 1924 | 29989 | 19424 | 31051*27712 | | 32141*30270 | |
| 28069 | 25122 | 28843*17924 | | 29989*20532 | | 31063 | 25938 | 32143 | 916 |
| 28069*25788 | | 28933 | 10284 | 30059 | 6614 | 31069 | 8908 | 32159 | 3258 |
| 28097 | 19704 | 29009 | 21676 | 30059*23588 | | 31081 | 18200 | 32159*16174 | |
| 28097*20464 | | 29017 | 18718 | 30071 | 23226 | 31139 | 7704 | 32191 | 12922 |
| 28109 | 6316 | 29059 | 9318 | 30071*28796 | | 31151 | 28242 | 32251 | 7406 |
| 28111 | 10020 | 29123 | 9532 | 30089 | 24890 | 31153 | 22202 | 32261 | 19120 |
| 28123 | 842 | 29129 | 14206 | 30097 | 3324 | 31159 | 22044 | 32297 | 28876 |
| 28151 | 25364 | 29137 | 2980 | 30109 | 11954 | 31181 | 26846 | 32303 | 13598 |
| 28151*27076 | | 29153 | 28044 | 30113 | 6468 | 31183 | 4822 | 32303*14222 | |
| 28163 | 23006 | 29167 | 19068 | 30113*27554 | | 31183*12768 | | 32321 | 25716 |
| 28163*24582 | | 29179 | 5694 | 30119 | 1984 | 31193 | 2018 | 32327 | 11404 |
| 28181 | 25492 | 29207 | 14646 | 30133 | 566 | 31193*17546 | | 32341 | 15996 |
| 28201 | 9958 | 29207*16164 | | 30133*26048 | | 31249 | 15944 | 32341*20294 | |
| 28211 | 168 | 29207*28510 | | 30169 | 1972 | 31271 | 17398 | 32369 | 29360 |
| 28211*13108 | | 29209 | 11574 | 30169* 7520 | | 31277 | 24380 | 32377 | 11872 |
| 28279 | 18486 | 29231 | 6604 | 30187 | 1952 | 31319 | 5480 | 32411 | 606 |
| 28351 | 23826 | 29243 | 526 | 30187*28362 | | 31319*20320 | | 32429 | 18692 |
| 28393 | 1804 | 29287 | 24048 | 30223 | 6712 | 31337 | 10362 | 32563 | 3654 |
| 28393* 6178 | | 29297 | 14032 | 30293 | 17822 | 31379 | 27060 | 32563*18882 | |
| 28409 | 17520 | 29327 | 22262 | 30307 | 12060 | 31387 | 19492 | 32573 | 26870 |
| 28429 | 7792 | 29327*27072 | | 30313 | 4718 | 31387*27282 | | 32603 | 22950 |
| 28447 | 13082 | 29333 | 14766 | 30323 | 21176 | 31391 | 15254 | 32609 | 22846 |
| 28463 | 3960 | 29339 | 18068 | 30367 | 19596 | 31397 | 26712 | 32609*25144 | |
| 28477 | 2964 | 29383 | 27458 | 30367*25238 | | 31481 | 3496 | 32609*29858 | |
| 28499 | 11432 | 29401 | 9372 | 30389 | 6204 | 31489 | 16344 | 32653 | 23852 |
| 28549 | 1788 | 29401*27744 | | 30427 | 21624 | 31511 | 30998 | 32687 | 15346 |
| 28549*14658 | | 29411 | 25694 | 30467 | 1930 | 31513 | 24642 | 32687*19392 | |
| 28549*17740 | | 29437 | 4936 | 30469 | 9702 | 31517 | 17052 | 32693 | 16514 |
| 28573 | 5442 | 29453 | 12548 | 30469*27432 | | 31531 | 9282 | 32713 | 2108 |
| 28579 | 17878 | 29501 | 5694 | 30509 | 2692 | 31547 | 3100 | 32749 | 828 |
| 28619 | 24768 | 29527 | 12790 | 30509*16020 | | 31567 | 21446 | | |
| 28621 | 2070 | 29527*22990 | | 30553 | 1822 | 31601 | 9168 | | |

文 献

- [1] ボレビッチ, シャハレビッチ, 「整数論」下, 吉岡書店
- [2] W. Johnson, "p-adic proofs of congruences for the Bernoulli numbers," J. Number Theory, v.7, 1975, pp.251-265.
- [3] Samuel Wagstaff, "The Irregular Primes to 12500," to appear.
- [4] C. L. Siegel, "Zu Zwei Bemerkungen Kummers," Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl. II, Nr. 6, 1964, pp.51-57.
- [5] D. H. and Emma Lehmer, "On the first case of Fermat's last theorem," Bull. Amer. Math. Soc., 47, 1941, pp.139-142.
- [6] H. S. Vandiver, "On Fermat's last theorem," Trans. A.M.S. 31, 1929, pp.613-642.
- [7] D. H. Lehmer, E. Lehmer, and H. S. Vandiver, "An application of high speed computing to Fermat's last theorem," Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v.40, 1954, pp.25-33.
- [8] H. S. Vandiver, "Fermat's last theorem and the second factor in the cyclotomic class number," Bull. A.M.S., 1934, pp.118-126.

1. J. Bertrand, Personal communication.
2. H. T. Davis, Tables of the Mathematical Functions, v. II, The Principia Press, Inc., San Antonio, 1935.
3. R. Ernvall and T. Metsänkylä, "Cyclotomic invariants and E-irregular primes." (To appear.)
4. K. Iwasawa, "On Γ -extensions of algebraic number fields," Bull. Amer. Math. Soc., v. 65, 1959, pp. 183-226. MR 23 #A1630.
5. K. Iwasawa and C. C. Sims, "Computation of invariants in the theory of cyclotomic fields," J. Math. Soc. Japan, v. 18, 1966, pp. 86-96. MR 34 #2560.
6. W. Johnson, "On the vanishing of the Iwasawa invariant μ_p for $p < 8000$," Math. Comp., v. 27, 1973, pp. 387-396. MR 52 # 5621.
7. W. Johnson, "Irregular prime divisors of the Bernoulli numbers," Math. Comp., v. 28, 1974, pp. 653-657. MR 50 # 229.
8. W. Johnson, "Irregular primes and cyclotomic invariants," Math. Comp., v. 29, 1975, pp. 113-120. MR 51 # 12781.
9. W. Johnson, "p-adic proofs of congruences for the Bernoulli numbers," J. Number Theory, v. 7, 1975, pp. 251-265. MR 51 # 12687.
10. D. H. Lehmer, E. Lehmer, and H. S. Vandiver, "An application of high-speed computing to Fermat's last theorem," Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 40, 1954, pp. 25-33. MR 15, 778.
11. E. Lehmer, "On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of Fermat and Wilson," Ann. Math. v. 39, 1938, pp. 350-360.
12. T. Metsänkylä, "Distribution of irregular prime numbers," J. Reine Angew. Math. (To appear.)
13. M. A. Morrison and J. Brillhart, "A method of factoring and the factorization of F_7 ," Math. Comp. v. 29, 1975, pp. 183-205.

14. J. L. Selfridge and B. W. Pollack, "Fermat's last theorem is true for any exponent up to 25,000," *Notices Amer. Math. Soc.*, v. 11, 1964, p. 97. Abstract # 608-138.
15. J. L. Selfridge and M. Wunderlich, Personal communication.
16. C. L. Siegel, "Zu zwei Bemerkungen Kummers," *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II*, Nr. 6, 1964, pp. 51-57. MR 29 # 1198; Also in *Gesammelte Abhandlungen*, v. III, Springer-Verlag, New York, 1966, pp. 436-442.
17. H. Wada, Personal communication.
18. S. S. Wagstaff, Jr., "Zeros of p -adic L -functions," *Math. Comp.*, v. 29, 1975, pp. 1138-1143.
19. K. Wooldridge, "Some results in arithmetical functions similar to Euler's ϕ -function," Ph.D. thesis, 1975, University of Illinois at Urbana-Champaign.
20. H. S. Vandiver, "On Fermat's Last Theorem," *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 31, 1929, pp. 613-642.
21. I. Yamaguchi, "On a Bernoulli numbers conjecture," *J. Reine Angew. Math.*, v. 288, 1976, 168-175.

Table 1: Irregular primes of index ≥ 4 .

| p | Values of 2k for which p divides B_{2k} | | | | |
|--------|---|-------|--------|--------|-------|
| 12613 | 308 | 502 | 9400 | 10536 | |
| 15737 | 6352 | 7454 | 12486 | 13078 | |
| 43189 | 9454 | 14464 | 26380 | 35578 | |
| 56263 | 10770 | 21958 | 52530 | 55200 | |
| 72337 | 2346 | 15858 | 44354 | 68030 | |
| 76289 | 11860 | 25284 | 26406 | 72266 | |
| 77783 | 5590 | 52114 | 52246 | 73092 | |
| 78233 | 10400 | 32084 | 46620 | 47364 | 64628 |
| 84067 | 16322 | 43722 | 44246 | 44794 | |
| 94693 | 11636 | 54754 | 76326 | 80650 | 84726 |
| 102559 | 6076 | 50092 | 54402 | 66162 | |
| 108179 | 9344 | 15048 | 56432 | 78964 | |
| 109789 | 10734 | 44536 | 44836 | 105520 | |
| 109843 | 16464 | 25396 | 27844 | 84202 | |
| 109891 | 36552 | 56682 | 69590 | 103212 | |
| 115727 | 36360 | 71962 | 101956 | 112830 | |
| 115901 | 33582 | 68462 | 90922 | 95722 | |
| 120557 | 42760 | 93110 | 95380 | 101758 | |